جلسه پنجم

توابع عملگرها — لم هاسدورف — عملگرهای معکوس و یکانی — قضیه در مورد عملگرهای هرمیتی

لم بیکر - هاسدورف — ویژه مقادیر و ویژه بردارهای یک عملگر

توابع عملگرها

$y = F(x)$

$F(\hat{A})$: تابع عملگر $\hat{A}$. اگر $\hat{A}$ عملگر خطی باشد، می‌توان نوشت:

$$F(\hat{A}) = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{a_n}_{\text{ضرایب دلخواه}} \hat{A}^n$$

مثال: $$e^{a\hat{A}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a\hat{A})^n}{n!} = 1 + a\hat{A} + \frac{1}{2!} a^2 \hat{A}^2 + \cdots$$

خصوصیات توابع عملگرها

- اگر $[\hat{A},\hat{B}] = 0 \Longrightarrow [F(\hat{A}),B] = 0$
- اگر $[\hat{A},\hat{B}] \neq 0 \Longrightarrow [F(\hat{A}),B] \neq 0$
- $[\hat{A}, F(\hat{A})] = 0$ ، $[\hat{A}^n, F(\hat{A})] = 0$ ، $[G(\hat{A}), F(\hat{A})] = 0$
- $(F(\hat{A}))^\dagger = F^*(A^\dagger)$ مثال: $(e^A)^\dagger = e^{A^\dagger}$

$$(e^{iA})^\dagger = \left(1 + iA + \frac{(iA)^2}{2!} + \cdots\right)^\dagger = 1 - iA^\dagger + \frac{(-iA^\dagger)^2}{2!} + \cdots = e^{-iA^\dagger}$$

$$(e^{iaA})^\dagger = e^{-ia^*A^\dagger}$$

- اگر $\hat{A}$ هرمیتی باشد، لزوماً $F(\hat{A})$ هرمیتی نیست.

$F(\hat{A}) = e^{iA}$ و $A = A^\dagger \xrightarrow{?} F(\hat{A}) = (F(\hat{A}))^\dagger$

$\hookrightarrow (F(A))^\dagger = e^{-iA^\dagger} = e^{-iA} \neq F(\hat{A})$ ✗

• اگر $\hat{A}$ هرمیتی باشد و $F(\hat{A})$ تابعی حقیقی از $\hat{A}$ باشد، می‌توان گفت $F(\hat{A})$ هرمیتی است.

$$F(\hat{A}) = e^{A} \quad , A = A^{\dagger} \xrightarrow{?} F(A) = (F(A))^{\dagger}$$

$$\hookrightarrow (F(\hat{A}))^{\dagger} = e^{A^{\dagger}} = e^{A} = F(A) \quad \checkmark$$

• $e^{\hat{A}} e^{\hat{B}} \neq e^{\hat{A}+\hat{B}}$

لم هاسدورف Hausdorf lemma

$$e^{\hat{A}} B e^{-\hat{A}} = B + [A,B] + \frac{1}{2!}[A,[A,B]] + \frac{1}{3!}[A,[A,[A,B]]] + \cdots$$

اثبات : $f(\lambda) = e^{\lambda A} B e^{-\lambda A}$

حول $\lambda = 0$ بسط می‌دهیم : $f(\lambda) = f(0) + \lambda f'(0) + \frac{\lambda^2}{2!} f''(0) + \cdots$

مشتق‌گیری از عملگرها

$$\frac{d}{dt}\hat{A}(t) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\hat{A}(t+\epsilon) - \hat{A}(t)}{\epsilon}$$

$$\frac{d}{dt}\hat{A}_{ij}(t) = \lim \frac{\hat{A}_{ij}(t+\epsilon) - \hat{A}_{ij}(t)}{\epsilon}$$

مثال : $\hat{A}(t) = \begin{pmatrix} t & 2t \\ e^{t} & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{d\hat{A}}{dt} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ e^{t} & 0 \end{pmatrix}$

به مسأله برمی‌گردیم :

$f(0) = B \qquad f(\lambda) = e^{\lambda A} B e^{-\lambda A}$

$$f'(0) = \underset{e^{\lambda A} A}{A e^{\lambda A}} B e^{-\lambda A}\Big|_{\lambda=0} + e^{\lambda A} B(-A e^{-\lambda A})\Big|_{\lambda=0} = e^{\lambda A}(\underbrace{AB - BA}_{[A,B]}) e^{-\lambda A}\Big|_{\lambda=0}$$

$$\Longrightarrow f'(0) = [A,B]$$

$$f''(\lambda)\Big|_{\lambda=0} = \frac{d}{d\lambda}\left\{ e^{\lambda A}[A,B]e^{-\lambda A}\right\} = A e^{\lambda A}[A,B]e^{-\lambda A} + e^{\lambda A}[A,B](-A)e^{-\lambda A}$$

$$= e^{\lambda A}\left\{ A[A,B] - [A,B]A \right\} e^{-\lambda A} = e^{\lambda A}[A,[A,B]]e^{-\lambda A}$$

$$\lambda = 0 \Longrightarrow f''(\lambda) = [A,[A,B]]$$

لم کمپل - بیکر - هاسدورف

$$e^A e^B = e^{A+B+\frac{1}{2}[A,B]+\frac{1}{12}[A+B,[A,B]]+\cdots}$$

* تمرین امتیازی: اثبات لم

(۱) اگر $[A,B] = (\text{عدد مختلط})\,\mathbb{1} \longrightarrow e^A e^B = e^{A+B+\frac{1}{2}[A,B]}$

$$e^A e^B = e^{A+B}\, e^{\frac{1}{2}[A,B]}$$

$$[X,P] = i\hbar\,\mathbb{1}$$

(۲) اگر $[A,B]=0 \Longrightarrow e^A e^B = e^{A+B}$

عملگر معکوس و یکانی — Inverse and unitary

• اگر $\det A \neq 0 \leftarrow \hat{A}$ می‌تواند معکوس داشته باشد.

$A^{-1}A = AA^{-1} = \mathbb{1} \Longrightarrow$ A^{-1} معکوس A است.

• $(ABCD)^{-1} = D^{-1}C^{-1}B^{-1}A^{-1}$ • $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$

تقسیم دو عملگر:

$A/B = \frac{A\mathbb{1}}{B} = AB^{-1}$ یا $A/B = \frac{\mathbb{1}A}{B} = B^{-1}A$

در حالت کلی $AB^{-1} \neq B^{-1}A$ (مسئله 2.12)

* عملگر U یک عملگر یکانی است، اگر

$U^{-1} = U^\dagger \Longrightarrow \underbrace{UU^{-1}}_{\mathbb{1}} = UU^\dagger \Longrightarrow \boxed{U^\dagger U = UU^\dagger = \mathbb{1}}$

شرط یکانی بودن U

• ضرب دو عملگر یکانی، یکانی است.

$U^{-1} = U^\dagger$

$V^{-1} = V^\dagger$

حکم: $(UV)^{-1} = (UV)^\dagger$ یا $(UV)^\dagger (UV) = \mathbb{1}$

$$(UV)^\dagger (UV) = (V^\dagger \underbrace{U^\dagger)(U}_{\mathbb{1}} V) = V^\dagger V = \mathbb{1}$$

مثال ۱: عملگر U بصورت $\hat{U} = e^{i\epsilon\hat{G}}$ داده شده است.
نشان دهید که اگر ϵ حقیقی و $\hat{G}$ هرمیتی باشند، این عملگر یکانی است.

$\hat{U}^\dagger = e^{-i\epsilon^*\hat{G}^\dagger}$ $\qquad (F(A))^\dagger = F^*(A^\dagger)$

$\Longrightarrow$ با شرط‌های مسأله: $U^\dagger = e^{-i\epsilon G} \Longrightarrow UU^\dagger = e^{-i\epsilon G}\, e^{+i\epsilon G} = \mathbb{1}$ ✓

$\epsilon = \epsilon^*,\ G^\dagger = G$

مثال ۲: ماتریس $\hat{A}$ مفروض است. $\hat{A}^\dagger$ و A^{-1} را بیابید و نشان دهید این ماتریس یکانی نیست.

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 2 & i & 0 \\ 3 & 1 & 5 \\ 0 & -i & -2 \end{pmatrix}$$

$$\det \hat{A} = 2\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -i & -2 \end{vmatrix} + (-i)\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} + 0 = -4+16i \neq 0 \rightarrow$$ A معکوس دارد.

$$(A^{-1})_{nm} = \frac{\text{cofactor of } A_{mn}}{\det A} \rightarrow$$

موجودی که از حذف سطر m اُم و ستون n اُم حاصل می‌شود و در دل خود یک فاکتور $(-1)^{n+m}$ هم دارد.

$$(A^{-1})_{11} = \frac{(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -i & -2 \end{vmatrix}}{\det A} = \frac{1}{\det A}(-2+5i)$$

$$(A^{-1})_{12} = \frac{(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} i & 0 \\ -i & -2 \end{vmatrix}}{\det A} = \frac{-1}{\det A}(-2i) = \frac{2i}{\det A} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{-4+16i}\begin{pmatrix} -2+5i & 2i & \\ & & \\ & 2i & \end{pmatrix}$$

$$(A^{-1})_{32} = \frac{(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & i \\ 0 & -i \end{vmatrix}}{\det A} = \frac{+2i}{\det A}.$$

$$\times \frac{-4-16i}{-4-16i}$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{68}\begin{pmatrix} 22+3i & 8-2i & 20-5i \\ -6-24i & 4+16i & 10+40i \\ -12+3i & 8-2i & -14-5i \end{pmatrix}$$

ویژه مقادیر و ویژه بردارهای یک عملگر

$|\psi\rangle$ را یک ویژه‌کت عملگر $\hat{A}$ می‌نامیم، اگر $\hat{A}|\psi\rangle = a|\psi\rangle$

ویژه مقدار ← a

- $\hat{A}^n|\psi\rangle = a^n|\psi\rangle$
- $F(\hat{A})|\psi\rangle = F(a)|\psi\rangle$

مثال: $A|\psi\rangle = a|\psi\rangle$

$$e^{iA}|\psi\rangle = \left(\mathbb{1} + iA + \frac{(iA)^2}{2!} + \cdots\right)|\psi\rangle$$
$$= \mathbb{1}|\psi\rangle + i\hat{A}|\psi\rangle + \frac{i^2}{2!}A^2|\psi\rangle + \cdots$$
$$= |\psi\rangle + ia|\psi\rangle + \frac{i^2}{2!}a^2|\psi\rangle + \cdots =$$
$$= \left(1 + ia + \frac{(ia)^2}{2!} + \cdots\right)|\psi\rangle = e^{ia}|\psi\rangle$$

- اگر A^{-1} وجود داشته باشد، مقادیر ویژه $\hat{A}^{-1}$ به صورت $1/a$ است. (عکس ویژه مقادیر عملگر $\hat{A}$)

$$A|\psi\rangle = a|\psi\rangle \xrightarrow[\text{از چپ}]{\times A^{-1}} \underbrace{A^{-1}A}_{\mathbb{1}}|\psi\rangle = a(A^{-1}|\psi\rangle) \Rightarrow \underbrace{1/a}_{\text{ویژه مقدار } A^{-1}}|\psi\rangle = A^{-1}|\psi\rangle$$

قضیه ۱.۲ : مقادیر ویژه عملگرهای هرمیتی حقیقی بوده و ویژه کت‌های متناظر با مقادیر ویژه متفاوت بر هم عمودند.

$$\hat{A}|a_n\rangle = a_n|a_n\rangle \longrightarrow \langle a_n|\overset{A}{A^\dagger} = a_n^*\langle a_n| \xrightarrow[\times|a_m\rangle]{A=A^\dagger} \langle a_n|A|a_m\rangle = a_n^*\langle a_n|a_m\rangle$$

$$\hat{A}|a_m\rangle = a_m|a_m\rangle \xrightarrow{\times\langle a_n|} \langle a_n|A|a_m\rangle = a_m\langle a_n|a_m\rangle$$

دو رابطه را کم می‌کنیم : $(a_n^* - a_m)\langle a_n|a_m\rangle = 0 \quad (I)$

اگر $m=n \Rightarrow (a_n^* - a_n)\underbrace{\langle a_n|a_n\rangle}_{1} = 0 \Rightarrow a_n^* = a_n$: ویژه مقادیر حقیقی هستند

اگر $m \neq n$ ، $a_n \neq a_m \xRightarrow{(I)} (\underbrace{a_n - a_m}_{\neq 0})\langle a_n|a_m\rangle = 0 \Rightarrow \langle a_n|a_m\rangle = 0$

ویژه کت‌های متناظر با ویژه مقادیر متفاوت بر هم عمودند.

اگر $m \neq n$ و $a_n = a_m$ (تبهگنی داریم) $\xRightarrow{(I)} (\underbrace{a_n - a_m}_{=0})\langle a_n|a_m\rangle = 0 \Rightarrow \langle a_n|a_m\rangle$

می‌تواند غیرصفر باشد.

یعنی ویژه بردارها (ویژه کت‌ها) در حالت تبهگنی لزوماً بر هم عمود نیستند اما خودمان آنها را دستی عمود می‌کنیم.

قضیه ۲.۲ : ویژه حالت‌های یک عملگر هرمیتی یک مجموعه کامل از بردارهای پایه را تعریف می‌کنند. عملگر در این پایه قطری می‌باشد و عناصر روی قطر همان ویژه مقادیر هستند. این پایه یکتاست اگر تبهگنی وجود نداشته باشد.

$$\hat{A} = \Big(\quad\Big)_{3\times3} \to \begin{matrix} a_1 \to |a_1\rangle \\ a_2 \to |a_2\rangle \\ a_3 \to |a_3\rangle \end{matrix}$$

اگر $a_1 = a_2 \rightsquigarrow |a\rangle$

$a_3 \neq a_2, a_1 \to |a_3\rangle$

$|a'\rangle$ ایجاد می‌کنیم که به $|a\rangle$ و $|a_3\rangle$ عمود باشد.

$$\downarrow$$

$$\hat{A}' = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix}$$

مجموعه کامل : $\langle a_i|a_j\rangle = \delta_{ij}$

$$\sum_i |a_i\rangle\langle a_i| = 1$$

نتیجه این قضیه : هر کت دلخواه $|\psi\rangle$ را می‌توان برحسب ویژه کت‌های عملگر هرمیتی $\hat{A}$ بسط داد.

$$|\psi\rangle = \sum c_i|a_i\rangle \Rightarrow \boxed{c_i = \langle a_i|\psi\rangle}$$

$$\vec{v} = \sum v_i \underbrace{\hat{e}_i}_{\text{پایه}} \Rightarrow v_i = \vec{v}\cdot\hat{e}_i$$

$\times\langle a_j|$

$$\langle a_j|\psi\rangle = \sum_i c_i \overbrace{\langle a_j|a_i\rangle}^{\delta_{ij}} = c_j$$

قضیه ۳.۲ اگر دو عملگر هرمیتی A و B باهم جابجا شوند و A هیچ تبهگنی نداشته باشد، دارای ویژه‌کت مشترک هستند.

$$\boxed{A|a_n\rangle = a_n|a_n\rangle} \xrightarrow[\text{از چپ}]{\times B} BA|a_n\rangle = a_n(B|a_n\rangle) \qquad [A,B]=0$$

$$\Longrightarrow AB|a_n\rangle = a_n(B|a_n\rangle) \Longrightarrow A(\underbrace{B|a_n\rangle}_{|\psi\rangle}) = a_n(\underbrace{B|a_n\rangle}_{|\psi\rangle})$$

$B|a_n\rangle$ ویژه بردار عملگر A با ویژه مقدار a_n: $\boxed{B|a_n\rangle = b_n|a_n\rangle} \Leftarrow |a_n\rangle$ ویژه‌کت B با ویژه مقدار b_n است.

$$B|b_n\rangle = b_n|b_n\rangle$$

$$A(\cancel{b_n}|a_n\rangle) = b_n(A_n|a_n\rangle) = \cancel{b_n}\, a_n|a_n\rangle$$

چون معمولاً ویژه‌کت‌ها با ویژه مقادیر برچسب زده می‌شوند، یک کت دو برچسبه تعریف می‌کنیم: $|a_n,b_n\rangle$

$$A|a_n,b_n\rangle = a_n|a_n,b_n\rangle$$

$$B|a_n,b_n\rangle = b_n|a_n,b_n\rangle$$

اگر A تبهگنی داشته باشد، نمی‌توان گفت که لزوماً $|a_n\rangle$ ویژه‌کت B هم هست.

قضیه ۴.۲: مقادیر ویژه عملگرهای پادهرمیتی یا صفر یا موهومی محض است.

قضیه ۵.۲: مقادیر ویژه عملگرهای یکانی، یک عدد مختلط با اندازه برابر ۱ است و بردارهای ویژه مقادیری که تبهگنی ندارند، برهم عمودند.

اثبات:

$$U|a_n\rangle = a_n|a_n\rangle \Longrightarrow \langle a_n|U^\dagger = \langle a_n|a_n^* \quad ① \qquad UU^\dagger = \mathbb{1}$$

$$U|a_m\rangle = a_m|a_m\rangle \quad ②$$

روابط ① و ② را ضرب می‌کنیم: $\langle a_n|\underbrace{U^\dagger U}_{\mathbb{1}}|a_m\rangle = \langle a_n|a_n^* a_m|a_m\rangle$

$$\Longrightarrow \langle a_n|a_m\rangle = a_n^* a_m\langle a_n|a_m\rangle \Longrightarrow \langle a_n|a_m\rangle(a_n^* a_m - 1) = 0$$

اگر $m=n \Longrightarrow \underbrace{\langle a_n|a_n\rangle}_{=1}(a_n^* a_n - 1) = 0 \Longrightarrow a_n^* a_n = 1 \Longrightarrow |a_n| = 1$

اگر $m\neq n \Longrightarrow \langle a_n|a_m\rangle(\underbrace{a_n^* a_m - 1}_{\neq 0}) = 0 \Longrightarrow \langle a_n|a_m\rangle = 0$

مثال ۱: الف- مقادیر ویژه عملگرهای مقابل را بیابید. آیا تبهگنی وجود دارد؟

ب- نشان دهید که $\{|a_n\rangle\}$ و $\{|b_n\rangle\}$ پایه‌های کامل تشکیل می‌دهند.

$$A=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{matrix}b_1=1\\ b_2=0\\ b_3=-1\end{matrix} \rightsquigarrow$$ B تبهگنی ندارد

$$\det|A-\lambda \mathbb{1}|=0 \longrightarrow \det\left\{\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}-\lambda\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right\}=0$$

$$\Longrightarrow \begin{vmatrix}-\lambda&1&0\\1&-\lambda&1\\0&1&-\lambda\end{vmatrix}=0 \Longrightarrow -\lambda\begin{vmatrix}-\lambda&1\\1&-\lambda\end{vmatrix}-1\begin{vmatrix}1&1\\0&-\lambda\end{vmatrix}=0$$

$$\Longrightarrow -\lambda(\lambda^2-1)-1(-\lambda)=0 \Longrightarrow -\lambda(\underbrace{\lambda^2-1-1}_{\lambda^2-2})=0$$

$$\Longrightarrow \lambda_1=-\sqrt2,\quad \lambda_2=0,\quad \lambda_3=+\sqrt2$$

$$\lambda_1=-\sqrt2 \Longrightarrow |-\sqrt2\rangle=\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}$$ A تبهگنی ندارد.

$$A|-\sqrt2\rangle=-\sqrt2|-\sqrt2\rangle \Longrightarrow \begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}=-\sqrt2\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases}\beta=-\sqrt2\alpha\\ \alpha+\gamma=-\sqrt2\beta\\ \beta=-\sqrt2\gamma\end{cases}\qquad \alpha=\gamma=1$$

$$2=-\sqrt2\beta \Longrightarrow \beta=-\sqrt2$$

$$|-\sqrt2\rangle=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\ -\sqrt2\\ 1\end{pmatrix}$$

اندازه بردار

باید بردارها نرمالیزه باشند : $\langle\ |\ \rangle=1$

$$\langle-\sqrt2|-\sqrt2\rangle=1 \Longrightarrow \begin{pmatrix}1&-\sqrt2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ -\sqrt2\\ 1\end{pmatrix}=1+2+1=4 \Longrightarrow \|\ \|=2$$

$$\lambda_2=0 \Longrightarrow |0\rangle=\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}=0\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}=0 \longrightarrow \begin{cases}\beta=0\\ \alpha+\gamma=0\\ \beta=0\end{cases}\qquad \beta=0,\ \alpha=1,\ \gamma=-1$$

$$|0\rangle=\frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}1\\ 0\\ -1\end{pmatrix}$$

$$\lambda_3=+\sqrt2 \Longrightarrow |+\sqrt2\rangle=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\ \sqrt2\\ 1\end{pmatrix}$$

برای عملگر $\hat{B}$:

$|1\rangle \leftarrow b_1 = 1$

$|0\rangle \leftarrow b_2 = 0$

$|-1\rangle \leftarrow b_3 = -1$

$b_1 = 1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \alpha = \alpha = 1 \\ \beta = 0 \\ -\gamma = \gamma \Longrightarrow \gamma = 0 \end{cases} \Longrightarrow |1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$b_2 = 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ 0 = 0 \rightsquigarrow \text{دلخواه } \beta = 1 \\ -\gamma = 0 \Longrightarrow \gamma = 0 \end{cases} \Longrightarrow |0\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$b_3 = -1 \Longrightarrow |-1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ب- ① باید پایه‌ها راست‌هنجار باشند:

$$|-\sqrt{2}\rangle = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} , \quad |0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} , \quad |\sqrt{2}\rangle = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ +\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\langle -\sqrt{2} | \sqrt{2}\rangle = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}(1 - 2 + 1) = 0 \Longrightarrow \langle a_n | a_m \rangle = 0$$

$n \neq m$

$\langle a_n | a_n \rangle = 1$

② رابطه

$$|a_1\rangle\langle a_1| + |a_2\rangle\langle a_2| + |a_3\rangle\langle a_3| = \mathbb{1} \Longleftarrow \sum_n |a_n\rangle\langle a_n| = \mathbb{1}$$

$$|-\sqrt{2}\rangle\langle -\sqrt{2}| = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ -\sqrt{2} & 2 & -\sqrt{2} \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$$

$$|0\rangle\langle 0| = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$|+\sqrt{2}\rangle\langle +\sqrt{2}| = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & 2 & \sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \text{همه را جمع می‌کنیم} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \mathbb{1}$$