جلسه چهارم

عملگرها ← ضرب عملگرها
← عملگرهای خطی
← عملگر تصویر

- الحاق هرمیتی
- خصوصیات الحاق گرفتن
- عملگرهای الحاقی و پاد الحاقی
- رابطه عدم قطعیت بین دو عملگر
- جابجاگر

عملگر (operator)

عملگر $\hat{A}$ یک قانون ریاضی است که وقتی بر $|\psi\rangle$ اثر می‌کند، $|\psi'\rangle$ را می‌دهد.
" " $\langle\varphi|$ " " $\langle\varphi'|$

$$\hat{A}: \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$$

$$|A\psi\rangle = \hat{A}|\psi\rangle = |\psi'\rangle$$

$$\langle\varphi|\hat{A} = \langle\varphi'|$$

مثال از عملگرها

عملگر واحد : $\hat{I}|\psi\rangle = |\psi\rangle$

عملگر گرادیان : $\vec{\nabla}\psi(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial\psi}{\partial x_i}\hat{e}_i$

عملگر لاپلاسی : $\nabla^2\psi(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2\psi}{\partial x_i^2}$

عملگر پاریته : $\hat{\Pi}\psi(\vec{r}) = \psi(-\vec{r})$

عملگر تکانه : $\hat{P}\psi(\vec{r}) = -i\hbar\vec{\nabla}\psi(\vec{r})$

ضرب عملگرها

- $AB \neq BA$
- $A^n A^m = A^{n+m}$
- $ABC = A(BC) = (AB)C$
- $AB|\psi\rangle = A(B|\psi\rangle)$
- $\langle\varphi|CD = (\langle\varphi|C)D$
- $\langle\varphi|A|\psi\rangle = \langle\varphi|(A|\psi\rangle) = (\langle\varphi|A)|\psi\rangle$ = Complex number

عملگرهای خطی

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(f+g) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \quad \checkmark$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}(f+g)\right]^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + 2\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial x} \quad \times$$

اگر $\hat{A}(a_1|\psi_1\rangle + a_2|\psi_2\rangle) = a_1(\hat{A}|\psi_1\rangle) + a_2(\hat{A}|\psi_2\rangle) \Rightarrow$ $\hat{A}$ یک عملگر خطی است.

$(\langle\varphi_1|b_1 + \langle\varphi_2|b_2)\hat{B} = (\langle\varphi_1|\hat{B})b_1 + (\langle\varphi_2|\hat{B})b_2 \Rightarrow$ " " " $\hat{B}$

مقدار چشمداشتی (انتظاری) عملگر — expectation value

$$\langle \hat{A} \rangle = \frac{\langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle}$$

عبارات نامشروع :

$$\cancel{|\varphi\rangle \hat{B}} \quad , \quad \cancel{\hat{A} \langle \psi|}$$

$$\langle \varphi | \hat{B} \qquad\qquad \hat{A} |\psi\rangle$$

نمایش ماتریسی عملگرها

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

← عملگرها را می‌توان بصورت ماتریس‌های $n \times n$ نمایش داد.

$$\begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}_{n\times n} \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}_{n\times 1} = \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}_{n\times 1} \qquad\qquad \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}_{1\times n} \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}_{n\times n} = \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}_{1\times n}$$

$$\hat{A} \, |\psi\rangle = |\psi'\rangle \qquad\qquad \langle \varphi | \hat{A} = \langle \varphi' |$$

$$\begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}_{n\times n} \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}_{1\times n} = ? \rightsquigarrow \cancel{A \langle \varphi |}$$

الحاق هرمیتی : Hermitian adjoint : $\dagger$

$$a^\dagger = a^*$$

الحاق هرمیتی یا (conjugate) یک عدد مختلط a برابر با a^* است.

" " یا (adjoint) " عملگر A برابر با $A^\dagger$ است و به این شکل تعریف می‌شود:

(I)
$$\boxed{\langle \psi | A^\dagger | \varphi \rangle = \langle \varphi | A | \psi \rangle^*}$$

⟵ نمایش ماتریسی این را می‌نویسیم:

$$\langle \hat{e}_i | A^\dagger | \hat{e}_j \rangle = \langle \hat{e}_j | A | \hat{e}_i \rangle^*$$

مثال: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

سمت راست

$$i=j=1 : \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]^* = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} \right]^* = a_{11}^*$$

$$\langle \hat{e}_1 | A^\dagger | \hat{e}_1 \rangle = (A^\dagger)_{11}$$

$$i=j=2 : \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]^* = a_{22}^*$$

$$\langle e_2 | A^\dagger | \hat{e}_2 \rangle = (A_{22})^\dagger$$

$$i=1, j=2 : \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]^* = \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} \right]^* = a_{21}^* \rightsquigarrow \langle \hat{e}_1 | A^\dagger | \hat{e}_2 \rangle = (A^\dagger)_{12}$$

$$i=2, j=1 : \quad a_{12}^* \rightsquigarrow \langle \hat{e}_2 | A^\dagger | \hat{e}_1 \rangle = (A^\dagger)_{21}$$

$$\Longrightarrow A^\dagger = \begin{pmatrix} a_{11}^* & a_{21}^* \\ a_{12}^* & a_{22}^* \end{pmatrix} = (A^*)^T = (A^T)^* \qquad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

خصوصیات الحاقی گرفتن

۱- اعداد به مزدوج مختلط خودشان تبدیل می‌شوند. $a \xrightarrow{\dagger} a^*$

ماتریسی

۲- اپراتورها به الحاقی‌شان تبدیل می‌شوند $A \xrightarrow{\dagger} A^\dagger = (A^T)^*$

۳- کت‌ها به براها و براها به کت‌ها تبدیل می‌شوند:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \xrightarrow{\dagger} (a^* \; b^* \; c^*) \qquad (|\psi\rangle)^\dagger = \langle\psi|$$

$$(\alpha \;\; \beta \;\; \gamma) \xrightarrow{\dagger} \begin{pmatrix} \alpha^* \\ \beta^* \\ \gamma^* \end{pmatrix} \qquad (\langle\varphi|)^\dagger = |\varphi\rangle$$

۴-

$$(\hat{A}^\dagger)^\dagger = \hat{A}$$

$$(a\hat{A})^\dagger = a^* \hat{A}^\dagger$$

$$(\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D})^\dagger = \hat{A}^\dagger + \hat{B}^\dagger + \hat{C}^\dagger + \hat{D}^\dagger$$

$$(ABCD)^\dagger = D^\dagger C^\dagger B^\dagger A^\dagger$$

$$(ABCD|\psi\rangle)^\dagger = \langle\psi| D^\dagger C^\dagger B^\dagger A^\dagger$$

اثبات می‌کنیم اگر $T = AB \longrightarrow T^\dagger = B^\dagger A^\dagger$

$$AB|\psi\rangle = |\psi'\rangle \xrightarrow{\dagger} \langle\psi'|$$

$$\| $$

$$A(\underbrace{B|\psi\rangle}_{|\varphi\rangle}) = A(\overbrace{|B\psi\rangle}^{|\varphi\rangle}) \xrightarrow{\dagger} \langle \overbrace{B\psi|}^{\langle\varphi|} A^\dagger \Bigg\} \Longrightarrow \langle\psi'| = \langle \underbrace{B\psi|}_{\langle\varphi| = \langle\psi|B^\dagger} A^\dagger$$

$$\Longrightarrow B|\psi\rangle = |\varphi\rangle \xrightarrow{\dagger} \langle\varphi| = \langle\psi|B^\dagger$$

$$\Downarrow$$

$$\langle\psi'| = \langle\psi| B^\dagger A^\dagger$$

* از مقایسه با رابطه *: $T^\dagger$

$$T|\psi\rangle = |\psi'\rangle \xrightarrow{\dagger} \langle\psi| T^\dagger = \langle\psi'| \quad *$$

- $\langle \hat{A}\psi| = \langle\psi| \hat{A}^\dagger$ - $|\hat{A}\psi\rangle = \hat{A}|\psi\rangle$

- $\langle a\psi| = \langle\psi| a^*$ - $|a\psi\rangle = a|\psi\rangle$

- $\langle aA^\dagger\psi| = a^*\langle\psi|A$ - $\langle\psi|A|\varphi\rangle = \langle\psi|A\varphi\rangle = \langle\psi A^\dagger|\varphi\rangle$

عملگرهای هرمیتی و پادهرمیتی

$\hat{A}$ هرمیتی است اگر $\hat{A} = \hat{A}^{\dagger}$

" پادهرمیتی است اگر $\hat{A} = -\hat{A}^{\dagger}$

$$(I) \longrightarrow \langle \psi | \overset{A}{A^{\dagger}} | \varphi \rangle = \langle \varphi | A | \psi \rangle^{*} \qquad II$$

$$(I) \longrightarrow \langle \psi | \overset{=-A}{A^{\dagger}} | \varphi \rangle = \langle \varphi | A | \psi \rangle^{*}$$

$$\langle \psi | A | \varphi \rangle = -\langle \varphi | A | \psi \rangle^{*} \qquad III$$

مثال ۱:

هرمیتی : $A + A^{\dagger} \longleftarrow (A+A^{\dagger})^{\dagger} = A^{\dagger} + (A^{\dagger})^{\dagger} = A^{\dagger} + A$

پادهرمیتی : $i(A+A^{\dagger}) \longleftarrow \left(i(A+A^{\dagger})\right)^{\dagger} = -i(A^{\dagger}+A)$

هرمیتی : $i(A-A^{\dagger}) \longleftarrow \left(i(A-A^{\dagger})\right)^{\dagger} = -i(A^{\dagger}-A) = i(A-A^{\dagger})$

مثال ۲: الحاقی $f(\hat{A})$ را بدست آورید.

$$f(\hat{A}) = e^{\hat{A}} = 1 + \hat{A} + \frac{1}{2!}\hat{A}^2 + \cdots$$

$$(f(A))^{\dagger} = (e^{\hat{A}})^{\dagger} = 1 + \hat{A}^{\dagger} + \frac{1}{2!}(\hat{A}^{\dagger})^2 + \cdots = e^{A^{\dagger}}$$

$$f(\hat{A}) = \frac{\overbrace{(1+iA+3A^2)}^{C}\,\overbrace{(1-2iA-9A^2)}^{D}}{\underbrace{5+7A}_{=E}} \rightsquigarrow (f(A))^{\dagger} = \frac{D^{\dagger}C^{\dagger}}{E^{\dagger}}$$

$$\longrightarrow (f(A))^{\dagger} = \frac{\left[1 + 2iA^{\dagger} - 9(A^{\dagger})^2\right]\left[1 - iA^{\dagger} + 3(A^{\dagger})^2\right]}{5 + 7A^{\dagger}}$$

* مقدار چشم‌داشتی عملگرهای هرمیتی حقیقی است.

اگر $\langle \varphi | = | \psi \rangle$ باشد:

$$II : \langle \psi | A | \psi \rangle = \langle \psi | A | \psi \rangle^{*}$$

* مقدار چشم‌داشتی عملگرهای پادهرمیتی، موهومی محض است.

$$III : \langle \psi | A | \psi \rangle = -\langle \psi | A | \psi \rangle^{*}$$

$$c = 3i \rightarrow c^{*} = -3i$$

عملگر تصویر   Projection operator

عملگری را عملگر تصویر می‌نامیم که ۱) هرمیتی باشد و ۲) توان ۲ آن خودش شود:

$$P^{\dagger} = P \quad , \quad P^2 = P$$

مثال: عملگر همانی (I) یک عملگر تصویر است.

خصوصیات:

۱) ضرب دو عملگر تصویر جابجاشونده، یک عملگر تصویر است.

$$P_1^{\dagger} = P_1 \quad , \quad P_1^2 = P_1$$
$$P_2^{\dagger} = P_2 \quad , \quad P_2^2 = P_2$$
$$P_1 P_2 = P_2 P_1$$

$P = P_1P_2 \rightsquigarrow$ ① $P^\dagger = (P_1P_2)^\dagger = P_2^\dagger P_1^\dagger = P_2P_1 = P_1P_2$ ✓

فرض: عملگرها جابجا می‌شوند

② $: (P_1P_2)^2 = (P_1\underbrace{P_2)(P_1}_{P_1P_2}P_2) = P_1^2P_2^2 = P_1P_2$ ✓

۲) جمع دو عملگر تصویر، در حالت کلی یک عملگر تصویر نیست.

۳) دو عملگر تصویر متعامد خوانده می‌شوند، اگر ضرب آنها صفر شود.

۴) برای این که جمع دو عملگر تصویر، خودش عملگر تصویر شود، باید عملگرها متعامد باشند.

$P = P_1 + P_2$

① $P^\dagger = (P_1+P_2)^\dagger = P_1^\dagger + P_2^\dagger = P_1 + P_2 = P$ ✓

② $P^2 = (P_1+P_2)^2 = P_1^2 + P_2^2 + \underbrace{\cancel{P_1P_2}}_{0} + \underbrace{\cancel{P_2P_1}}_{0} = P_1 + P_2 = P$ ✓

مثال: نشان دهید که $|\psi\rangle\langle\psi|$ یک عملگر تصویر است اگر $|\psi\rangle$ به یک نرمالیزه باشد.

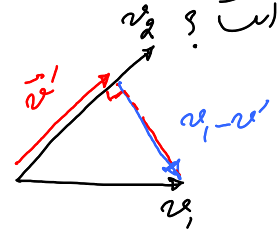
① $: (|\psi\rangle\langle\psi|)^\dagger = |\psi\rangle\langle\psi|$ ✓

② $: (|\psi\rangle\langle\psi|)^2 = (|\psi\rangle\langle\psi|)(|\psi\rangle\langle\psi|) = |\psi\rangle\overbrace{\langle\psi|\psi\rangle}^{1}\langle\psi| = |\psi\rangle\langle\psi|$ ✓

$|\psi\rangle\langle\psi|$ چه نوع عملگری است؟

$A = |\psi\rangle\langle\psi|$

$A|\alpha\rangle = |\psi\rangle\overbrace{\langle\psi|\alpha\rangle}^{c} = c|\psi\rangle$



جبر جابجاگر

جابجاگر $: [\hat A,\hat B] \equiv \hat A\hat B - \hat B\hat A \xrightarrow{\text{اگر}} \underbrace{\hat A\hat B = \hat B\hat A}_{\text{دو عملگر جابجا شوند}} \longrightarrow [\hat A,\hat B] = 0$

پادجابجاگر $: \{\hat A,\hat B\} \equiv \hat A\hat B + \hat B\hat A$

- اگر دو اپراتور A و B هرمیتی باشند و ضرب آنها هم هرمیتی باشد، دو اپراتور جابجا پذیرند.

$A = A^\dagger$

$B = B^\dagger$

$C = AB \longrightarrow C = C^\dagger$

$C^\dagger = B^\dagger A^\dagger = BA = AB \Longrightarrow BA = AB \Longrightarrow [A,B] = 0$

خصوصیات جابجاگر

1) پادتقارنی : $[A,B] = -[B,A]$

2) خطی بودن : $[A, B+C+D+\cdots] = [A,B] + [A,C] + \cdots$

3) الحاق گرفتن : $[A,B]^{\dagger} = (AB-BA)^{\dagger} = B^{\dagger}A^{\dagger} - A^{\dagger}B^{\dagger} = [B^{\dagger}, A^{\dagger}]$

4) پخش : $[A,BC] = [A,B]C + B[A,C]$

اثبات: $[A,BC] = A(BC) - (BC)A = \underbrace{ABC - BAC}_{(\underbrace{AB-BA}_{[A,B]})C} + \underbrace{BAC - BCA}_{B(\underbrace{AC-CA}_{[A,C]})}$

5) اتحاد ژاکوبی : $[A,[B,C]] + [B,[C,A]] + [C,[A,B]] = 0$

* تمرین: اثبات به عهده دانشجو

6) $[A,B^n] = \sum_{j=0}^{n-1} B^j [A,B] B^{n-j-1}$

اثبات: $[A, BB^{n-1}] \overset{④}{=} [A,B]B^{n-1} + B\underbrace{[A,B^{n-1}]}$

$[A, BB^{n-2}] = [A,B]B^{n-2} + B[A,B^{n-2}]$

$= [A,B]B^{n-1} + B[A,B]B^{n-2} + B^2[A,B]B^{n-3} + \cdots = \sum_{j=0}^{n-1} B^j [A,B] B^{n-j-1}$

7) جابجاگر هر عدد با اپراتور صفر است : $[\hat{A}, a] = 0$

$\hookrightarrow \hat{A}a - a\hat{A} = 0$

- جابجاگر دو عملگر هرمیتی، پادهرمیتی است. *

$A = A^{\dagger}$

$B = B^{\dagger}$

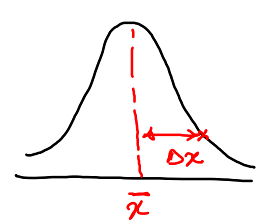
$[A,B]^{\dagger} \overset{③}{=} [B^{\dagger}, A^{\dagger}] = [B,A] = -[A,B]$

$\Longrightarrow C = [A,B] = -C^{\dagger}$

رابطه عدم قطعیت بین دو عملگر

$\langle A \rangle = \langle \psi | A | \psi \rangle$ ⇝ میانگین اندازه گیری عملگر A

$\langle B \rangle = \langle \psi | B | \psi \rangle$



اپراتور $D\hat{A} \equiv \hat{A} - \langle A \rangle \mathbb{1} \Longrightarrow (D\hat{A})^2 = (\hat{A} - \langle \hat{A} \rangle \mathbb{1})^2$

$D\hat{B} \equiv \hat{B} - \langle B \rangle \mathbb{1}$

$$\Rightarrow (D\hat{A})^2 = \hat{A}^2 - 2\langle \hat{A}\rangle \hat{A} + \langle \hat{A}\rangle^2 \mathbb{1} \Rightarrow \langle (D\hat{A})^2\rangle = \underline{\langle \psi | (D\hat{A})^2 | \psi\rangle}$$

$$= \underbrace{\langle \psi | A^2 | \psi\rangle}_{\langle \hat{A}^2\rangle} - 2\langle \hat{A}\rangle \underbrace{\langle \psi | \hat{A} | \psi\rangle}_{\langle \hat{A}\rangle} + \langle \hat{A}\rangle^2 \underbrace{\langle \psi | \mathbb{1} | \psi\rangle}_{1}$$

$$\Rightarrow \langle (D\hat{A})^2\rangle = \langle A^2\rangle - \langle A\rangle^2 \equiv (DA)^2 \Rightarrow \begin{cases} DA \equiv \sqrt{\langle (D\hat{A})^2\rangle} \\ DB \equiv \sqrt{\langle (D\hat{B})^2\rangle} \end{cases}$$ عدد هستند.

نامساوی شوارتز : $|\langle \chi | \varphi\rangle|^2 \leqslant \langle \chi | \chi\rangle \langle \varphi | \varphi\rangle$

$|\chi\rangle = (D\hat{A})|\psi\rangle \longrightarrow \langle \chi | = \langle \psi | (D\hat{A})^\dagger$

$|\varphi\rangle = (D\hat{B})|\psi\rangle \longrightarrow \langle \varphi | = \langle \psi | (D\hat{B})^\dagger$

$\langle \chi | \varphi\rangle = \langle \psi | \overset{D\hat{A}}{(D\hat{A})^\dagger} (D\hat{B}) | \psi\rangle = \langle D\hat{A} D\hat{B}\rangle$

$\langle \varphi | \varphi\rangle = \langle \psi | \overset{D\hat{B}}{(D\hat{B})^\dagger} (D\hat{B}) | \psi\rangle = \langle (D\hat{B})^2\rangle$

$\langle \chi | \chi\rangle = \langle \psi | \underset{D\hat{A}}{(D\hat{A})^\dagger} D\hat{A} | \psi\rangle = \langle (D\hat{A})^2\rangle$

فرض مسأله : A و B عملگرهای هرمیتی هستند : $A = A^\dagger$, $B = B^\dagger$

$D\hat{A} = A - \langle A\rangle \mathbb{1} \Rightarrow (D\hat{A})^\dagger = \hat{A}^\dagger - \langle A\rangle^* \mathbb{1}^\dagger = \hat{A} - \langle \hat{A}\rangle \mathbb{1} = D\hat{A}$

چشم‌داشت عملگرهای هرمیتی حقیقی است.

$$[D\hat{A}, D\hat{B}] = [\hat{A} - \langle \hat{A}\rangle \mathbb{1}, B - \langle \hat{B}\rangle \mathbb{1}] = [\hat{A}, \hat{B}] - \langle \hat{B}\rangle \underbrace{[\hat{A}, \mathbb{1}]}_{0} - \langle \hat{A}\rangle \underbrace{[\mathbb{1}, \hat{B}]}_{0}$$
$$+ \underbrace{[\langle \hat{A}\rangle \mathbb{1}, \langle \hat{B}\rangle \mathbb{1}]}_{0} = [\hat{A}, \hat{B}]$$

$\Rightarrow$ نامساوی شوارتز : $\langle (D\hat{A})^2\rangle \langle (D\hat{B})^2\rangle \geqslant |\langle \underline{D\hat{A} D\hat{B}}\rangle|^2$

$$D\hat{A} D\hat{B} = \tfrac{1}{2} \overbrace{[D\hat{A}, D\hat{B}]}^{[\hat{A},\hat{B}]} + \tfrac{1}{2}\{D\hat{A}, D\hat{B}\}$$

$$\langle D\hat{A} D\hat{B}\rangle = \tfrac{1}{2} \overbrace{\langle \underbrace{[\hat{A}, \hat{B}]}_{*\,:\,\text{پادهرمیتی}} \rangle}^{\text{موهومی محض}\,:\,*''} + \tfrac{1}{2} \overbrace{\langle \underbrace{\{D\hat{A}, D\hat{B}\}}_{*\,\text{هرمیتی}} \rangle}^{\text{حقیقی}\,:\,*'} = \underbrace{\tfrac{ib}{2}}_{\text{موهومی محض}} + \underbrace{c}_{\text{حقیقی}}$$

$$|\langle D\hat{A} D\hat{B}\rangle|^2 = \frac{b^2}{4} + c^2 \geqslant b^2/4 \quad , \; b = \langle [\hat{A}, \hat{B}]\rangle$$

$$\Longrightarrow \sqrt{\langle (\Delta \hat{A})^2 \rangle \langle (\Delta \hat{B})^2 \rangle} \geq \sqrt{\tfrac{1}{4} \left| \langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle \right|^2}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\Delta A \, \Delta B \geq \tfrac{1}{2} \left| \langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle \right|}$$

رابطه عدم قطعیت