جلسه سوم

فضای هیلبرت ← میدان

فضای برداری

فضای ضرب داخلی و نرم

فضای ماتریس

دنباله کوشی

ابعاد و پایه فضای برداری ← استقلال خطی

عملگرهای دیراک ← کت ها

براها

فصل دوم: ابزارهای ریاضی مکانیک کوانتومی

$F=\{a,b,c,\dots\}$

میدان (Field): مجموعه F را یک میدان می‌نامند، اگر دارای خواص زیر باشد:

۱) بسته بودن نسبت به جمع و ضرب

$$\forall a,b\in F:\quad a\cdot b\in F\ ,\quad a+b\in F$$

۲) شرکت‌پذیری نسبت به جمع و ضرب

$$\forall a,b,c\in F:\quad a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c\quad ,\quad a+(b+c)=(a+b)+c$$

۳) جابجایی نسبت به جمع و ضرب

$$\forall a,b\in F:\quad a\cdot b=b\cdot a\ ,\quad a+b=b+a$$

۴) وجود عضو خنثی ضرب و جمع

$$\exists 0\in F\ ,\ \forall a\in F:\quad 0+a=a+0=a$$

$$\exists 1\in F\ ,\ \forall a\in F:\quad 1\cdot a=a\cdot 1=a$$

۵) وجود وارون ضربی و جمعی

$$\forall a\in F\ ,\ \exists(-a)\in F:\quad a+(-a)=(-a)+a=0$$

$$\forall a\in F\ ,\ \exists a^{-1}\in F:\quad a\cdot a^{-1}=a^{-1}\cdot a=1$$

۶) خاصیت پخشی ضرب نسبت به جمع.

$$\forall a,b,c\in F:\quad a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$$

فضای برداری (vector space)

$+:\ V\times V\longrightarrow V$

$\cdot:\ F\times V\longrightarrow V$

مجموعه V را یک فضای برداری روی میدان F می‌نامند، هرگاه دو عمل زیر تعریف شده و خواص زیر برقرار باشد:

(اعضای V را با $\vec{v}$، $\vec{u}$، $\vec{w}$ و ... و اعضای F را با α، β و γ و ... نمایش می‌دهیم)

$A_1)\ \forall v, v' \in V:\ v + v' \in V$

$A_2)\ \forall v, v' \in V:\ v + v' = v' + v$

$A_3)\ \forall v, v', v'' \in V:\ v + (v' + v'') = (v + v') + v''$

$A_4)\ \exists 0 \in V,\ \forall v \in V:\ 0 + v = v + 0 = v$

$A_5)\ \forall v \in V,\ \exists (-v) \in V:\ v + (-v) = (-v) + v = 0$

$M_1)\ \forall \alpha \in F,\ \forall v \in V:\ \alpha v \in V$

$M_2)\ \forall \alpha, \beta \in F,\ \forall v \in V:\ (\alpha + \beta) v = \alpha v + \beta v$

$M_3)\ \forall \alpha \in F,\ \forall v, v' \in V:\ \alpha (v + v') = \alpha v + \alpha v'$

$M_4)\ \exists 1 \in F,\ \forall v \in V:\ 1 v = v$

$M_5)\ \forall \alpha, \beta \in F,\ \forall v \in V:\ \alpha (\beta v) = (\alpha \beta) v$

مثال‌هایی از فضای برداری:

۱- مجموعه ماتریس‌های $m \times n$ که درایه‌های آن عناصر میدان باشند: $M_{m \times n}(F)$

۲- مجموعه چندجمله‌ای‌های حقیقی مرتبه n از متغیر x که در فاصله $[a,b]$ تعریف شده‌اند: $P_n[a,b]$

۳- 〃 توابع حقیقی یا مختلط k بار مشتق پذیر در فاصله $[a,b]$: $C^k[a,b]$

۴- 〃 n تایی های مرتب مختلط یا حقیقی: C^n

فضای ضرب داخلی

در یک فضای برداری V، یک عمل دوتایی $(\ ,\ ): V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$ را یک ضرب داخلی می‌نامیم، هرگاه شرایط زیر برقرار باشد:

1) $(v, v' + \alpha v'') = (v, v') + \alpha (v, v'')$ $\qquad \vec{v} \cdot (\vec{v}' + \alpha \vec{v}'') = \vec{v} \cdot \vec{v}' + \alpha (\vec{v} \cdot \vec{v}'')$

2) $(v, v') = (v', v)^*$ $\qquad$ اگر بردارها حقیقی باشند $\vec{v} \cdot \vec{v}' = \vec{v}' \cdot \vec{v}$

3) $(v, v) \geq 0 \quad , \quad (v, v) = 0 \Longleftrightarrow v = 0$

مثال: در C^n: $(v,v') := \sum_{i=1}^{n} v_i v_i'^*$

$\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$, $\vec{v}'=(v_1',v_2',v_3') \Longrightarrow \vec{v}\cdot\vec{v}' = v_1v_1' + v_2v_2' + v_3v_3'$

$\vec{v}\cdot\vec{v}' = \sum_{i=1}^{3} v_i v_i'^*$

در $M_{n\times m}(\mathbb{C})$: $(A,B) := tr(A^\dagger B)$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & i \\ i+3 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{*} A^* = \begin{bmatrix} 1 & -i \\ -i+3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A \xrightarrow{T} A^T = \begin{bmatrix} 1 & i+3 \\ i & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{*} \underbrace{(A^T)^*}_{A^\dagger} = \begin{bmatrix} 1 & -i+3 \\ -i & 2 \end{bmatrix}$$

در $C^k[a,b]$:

$$(f,g) := \int_a^b f^*(x)\, g(x)\, dx$$

نامساوی کوشی - شوارتز: در یک فضای ضرب داخلی داریم: $|(v,v')|^2 \le (v,v)(v',v')$ * تمرین

اندازه یک بردار: در یک فضای ضرب داخلی، اندازه یا نرم یک بردار را به این شکل تعریف می‌کنیم:

$$\|x\| := \sqrt{(x,x)}$$

مثال: در C^n: $|x|^2 = \sum_{i=1}^{3} x_i x_i^*$

در $M_{n\times m}(\mathbb{C})$: $|A|^2 = tr(A^\dagger A)$

در $C^k[a,b]$: $|f|^2 = \int_a^b f^*(x) f(x)\, dx$ ⟵ توابع انتگرال‌پذیر مجذوری

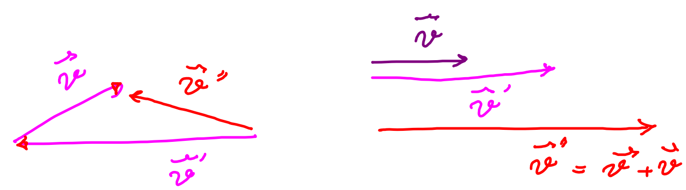
فضای نرم یا فضای اندازه‌دار (Normed space)

یک فضای برداری V که در آن نگاشت $\|\ \| : V \to \mathbb{R}$ تعریف شده باشد را فضای نرم می‌نامیم، اگر شرایط زیر برقرار باشد:

1) $\forall v \in V : \|v\| \geq 0$ و $\|v\| = 0 \longleftrightarrow v = 0$

2) $\|\alpha v\| = |\alpha|\, \|v\|$

3) $\|v + v'\| \leq \|v\| + \|v'\|$



فضای متریک

در یک فضای برداری نرم V، می‌توان فاصله بین دو بردار را به صورت مقابل تعریف کرد:

$$d(x,y) := \|x - y\|$$

این فاصله دارای خواص زیر است:

1) $d(x,y) \geq 0$; $d(x,y)=0 \iff x=y$

2) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

دنباله کوشی

در یک فضای برداری، دنباله‌ای از بردارها مثل $\{v_1, v_2, \dots, v_n, \dots\}$ را در نظر می‌گیریم. این دنباله را یک دنباله کوشی می‌نامیم هرگاه فاصله بین بردارها به تدریج کم شود:

$$\forall m,n > N \longrightarrow \|v_n - v_m\| \leq \epsilon$$

یا

$$\lim_{n,m \to \infty} \|v_n - v_m\| = 0$$

یک فضای برداری را کامل می‌گویند هرگاه حد دنباله‌های کوشی را در خود داشته باشد.

یک فضای ضرب داخلی را که کامل باشد، فضای هیلبرت (Hilbert space) می‌نامیم.

〃	〃	نرم	〃	〃	〃	〃 باناخ (Banach space)	〃 .

* **تمرین**: فضای توابع حقیقی $C[-1,1]$ را با ضرب داخلی استاندارد $(f,g) = \int_{-1}^{+1} f(x)g(x)\,dx$ را در نظر بگیرید. دنباله مقابل را تعریف می‌کنیم. نشان دهید که این فضا، فضای هیلبرت نیست.

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & x \leq -1/n \\ \frac{1}{2}(nx+1) & -1/n \leq x \leq 1/n \\ 1 & x \geq 1/n \end{cases}$$

بعد و پایه فضای برداری

استقلال خطی: در فضای برداری V، بردارهای $v_1, v_2, \dots, v_n$ را مستقل خطی می‌نامند اگر و تنها اگر حل معادله زیر فقط به ازای $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$ باشد.

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n = 0 \rightsquigarrow \sum_{i=1}^{n} a_i v_j = 0$$

$$a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow a_1 = a_2 = 0$$

$$a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow a_1 = 2, \quad a_2 = 1$$

اگر مجموعه‌ای از اسکالرها وجود داشته باشد (همگی نباید صفر باشند) بطوریکه یکی از بردارها مثل v_n را بتوان بصورت ترکیب خطی از بقیه در نظر گرفت، در این صورت مجموعه $\{v_i\}$، وابسته خطی هستند:

$$v_n = \sum_{i=1}^{n-1} a_i v_i + \sum_{i=n+1}^{N} a_i v_i$$

بعد فضا: بیشینه تعداد بردارهای مستقل خطی در هر فضای برداری را بعد آن فضا می‌نامیم.

هر فضای برداری n بعدی دارای n بردار مستقل خطی است.

هر برداری در این فضا را می‌توان برحسب بردارهای مستقل خطی بسط داد.

$$v = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i$$

مثال: در C^n : $e_1 = (1,0,\dots,0)$ و $e_2 = (0,1,\dots,0)$ و ... و $e_n = (0,\dots,1)$

در $C^k[a,b]$: $e_n(x) = \sqrt{\dfrac{2}{b-a}}\,\sin\dfrac{n\pi x}{b-a}$

در $P_n[a,b]$: پایه‌های فضا : $\{1, x, x^2, \dots\}$ که می‌توان با فرآیند گرام-اشمیت آنها را باهم عمود کرد.

پایه فضا: مجموعه‌ای از ماکزیمم تعداد بردارهای مستقل خطی

پایه orthonormal (راست هنجار) : $(\hat e_i, \hat e_j) = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i\neq j \end{cases}$

بردارهای پایه را کامل می‌نامند اگر کل فضای برداری را جاروب کند.

$- \; a_i = (\hat e_i, v)$

$$\vec v = v_1 \hat e_1 + v_2 \hat e_2 + \dots$$

$$v_1 = \vec v \cdot \hat e_1 = v_1 \overset{1}{(\hat e_1 \cdot \hat e_1)} + \cancel{v_2 \hat e_2 \cdot \hat e_1} + \cancel{\dots}$$

مثال ۱: نشان دهید توابع 4 و x^2 و e^{2x} مستقل خطی هستند.

رونسکین Wronskian

$$W = \begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \dots & \varphi_n \\ \varphi_1' & \varphi_2' & \dots & \varphi_n' \\ \vdots & \vdots & & \\ \varphi_1^{(n-1)} & \varphi_2^{(n-1)} & \dots & \varphi_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

اگر $W=0$ ← توابع همه‌جا (همه نقاط) وابسته خطی هستند.

اگر $W\neq 0$ ← " مستقل خطی هستند.

اگر W در بعضی نقاط صفر و در بعضی دیگر غیر صفر باشد از

رونسکین برای تشخیص مستقل یا وابسته خطی بودن توابع نمی‌توان استفاده کرد.

$$W = \begin{vmatrix} 4 & x^2 & e^{2x} \\ 0 & 2x & 2e^{2x} \\ 0 & 2 & 4e^{2x} \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 2x & 2e^{2x} \\ 2 & 4e^{2x} \end{vmatrix} = 4\left(8x e^{2x} - 4e^{2x}\right)$$

$$= 16 e^{2x} \{2x - 1\}$$

$$4a_1 + a_2 x^2 + a_3 e^{2x} = 0 \Longrightarrow a_1 = a_2 = a_3 = 0$$

- x و $5x$ و x^2 ← وابسته خطی

$$W = \begin{vmatrix} x & 5x & x^2 \\ 1 & 5 & 2x \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} x & 5x \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 2(5x - 5x) = 0$$

$$a_1 x + a_2 (5x) + a_3 x^2 = 0 \longrightarrow a_3 = 0,\; a_1 = -5,\; a_2 = 1$$

- x, x^2, x^3 ← مستقل خطی هستند

$$W = \begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 2 & 6x \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} x & x^3 \\ 1 & 3x^2 \end{vmatrix} + 6x \begin{vmatrix} x & x^2 \\ 1 & 2x \end{vmatrix}$$

$$= -2(3x^3 - x^3) + 6x(2x^2 - x^2) = 4x^3 - 6x^3 = -2x^3 \neq 0$$

$$a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 = 0 \longrightarrow a_1 = a_2 = a_3 = 0$$

مثال ۲: آیا چهار بردار مقابل مستقل خطی هستند؟ وابسته خطی هستند.

$\vec{A} = (1,-2,3)$

$\vec{B} = (-4,1,7)$ $\qquad \vec{D} = 2\vec{A} - 3\vec{B} + \vec{C}$

$\vec{C} = (0,10,11)$

$\vec{D} = (14,3,-4)$

نمادگذاری دیراک

بردار حالت $\psi \longrightarrow |\psi\rangle \qquad |\ \rangle : ket$

فضای دوگان (dual) را تعریف می‌کنیم که متناظر فضای کت است و اعضای آن را با bra نشان می‌دهیم: $\langle\ |$

$|\psi\rangle \longrightarrow \langle\psi|$

نمادگذاری دیراک برای ضرب داخلی: $\langle\ |\ \rangle \to \langle\varphi|\psi\rangle = (\varphi,\psi)$

خصوصیت کت‌ها و براها

1) $|\psi\rangle \longrightarrow \langle\psi|$

2) $a|\psi\rangle + b|\varphi\rangle \longrightarrow a^*\langle\psi| + b^*\langle\varphi|$

3) $|a\psi\rangle = a|\psi\rangle \quad , \quad \langle a\psi| = a^*\langle\psi|$

4) $\langle\psi|\varphi\rangle = \langle\varphi|\psi\rangle^* \rightsquigarrow$ اگر ψ و φ حقیقی باشند: $\langle\psi|\varphi\rangle = \langle\varphi|\psi\rangle$

5) $\langle\psi|a_1\psi_1 + a_2\psi_2\rangle = a_1\langle\psi|\psi_1\rangle + a_2\langle\psi|\psi_2\rangle$

6) $\langle a_1\psi_1 + a_2\psi_2|\psi\rangle = a_1^*\langle\psi_1|\psi\rangle + a_2^*\langle\psi_2|\psi\rangle$

7) $|\psi\rangle$ نرمالیزه است: $\langle\psi|\psi\rangle = 1$

8) $\sqrt{\langle\psi+\varphi|\psi+\varphi\rangle} \leqslant \sqrt{\langle\psi|\psi\rangle}\sqrt{\langle\varphi|\varphi\rangle}$

9) $|\langle\psi|\varphi\rangle|^2 \leqslant \langle\psi|\psi\rangle\langle\varphi|\varphi\rangle$

10) حالت‌های متعامد (orthogonal states): $\langle\psi|\varphi\rangle = 0$

11) حالت‌های راست‌هنجار (orthonormal states): $\langle\psi|\varphi\rangle = 0 \quad , \quad \langle\psi|\psi\rangle = 1 \quad , \quad \langle\varphi|\varphi\rangle = 1$

کمیت‌های ممنوعه: $\cancel{|\psi\rangle|\varphi\rangle}$ یا $\cancel{\langle\varphi|\langle\psi|}$ $\qquad \langle\varphi|\otimes\langle\psi| \qquad |\psi\rangle\otimes|\varphi\rangle$

نمادگذاری ماتریسی کت و برا

$$|v\rangle = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \quad , \quad \langle w| = (w_1^* \;\; w_2^* \;\; \cdots \;\; w_n^*)$$

$$\longrightarrow \langle v| = (v_1^* \;\; v_2^* \;\; \cdots \;\; v_n^*)$$

$$\langle w|v\rangle = (w_1^* \;\; w_2^* \;\; \cdots \;\; w_n^*)_{1\times n} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}_{n\times 1} = w_1^* v_1 + w_2^* v_2 + \cdots + w_n^* v_n = \sum_{i=1}^{n} w_i^* v_i$$: عدد

ضرب داخلی

$$|v\rangle\langle w| = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}_{n\times 1} (w_1^* \;\; w_2^* \;\; \cdots \;\; w_n^*)_{1\times n} = \begin{pmatrix} v_1 w_1^* & v_1 w_2^* & \cdots & v_1 w_n^* \\ \vdots & & & \\ v_n w_1^* & \cdots & & v_n w_n^* \end{pmatrix}_{n\times n}$$: ماتریس

ضرب خارجی

کت‌های ممنوعه : $|v\rangle|w\rangle = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$ → این ضرب‌ها ماتریسی بی‌معنی هستند

پس $|v\rangle|w\rangle$ یک کت ممنوعه است.

مثال ۱: دو کت زیر را در نظر بگیرید.

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} -3i \\ 2+i \\ 4 \end{pmatrix} \qquad |\varphi\rangle = \begin{pmatrix} 2 \\ -i \\ 2-3i \end{pmatrix}$$

الف - $\langle\varphi|$ را بدست آورید. ب - $\langle\varphi|\psi\rangle$ را بیابید.

الف - $\langle\varphi| = (2 \;\; +i \;\; 2+3i)$

ب - $\langle\varphi|\psi\rangle = (2 \;\; i \;\; 2+3i)\begin{pmatrix} -3i \\ 2+i \\ 4 \end{pmatrix} = 2(-3i) + i(2+i) + (2+3i)4 = 8i+7$

مثال ۲: $|e_i\rangle$ ها بردارهای پایه فضای دو بعدی هستند.

$$\langle e_i|e_j\rangle = \delta_{ij}$$

$$|\psi\rangle = 3i\,|e_1\rangle - 7i\,|e_2\rangle \longrightarrow \langle\psi| = -3i\langle e_1| + 7i\langle e_2|$$

$$|\chi\rangle = -|e_1\rangle + 2i\,|e_2\rangle \longrightarrow \langle\chi| = -\langle e_1| - 2i\langle e_2|$$

الف - $|\psi+\chi\rangle$ و $\langle\psi+\chi|$

ب - $\langle\chi|\psi\rangle$ و $\langle\psi|\chi\rangle$ را بیابید. آیا برابرند؟

الف) $|\psi+\chi\rangle = |\psi\rangle + |\chi\rangle = (3i-1)|e_1\rangle - 5i|e_2\rangle$

$$\langle\psi+\chi| = (-3i-1)\langle e_1| + 5i\langle e_2|$$

$$\langle\psi+\chi| = \langle\psi| + \langle\chi| = (-3i-1)\langle e_1| + 5i\langle e_2|$$

ب) $\langle \chi | \psi \rangle = \{ -\langle e_1| - 2i\langle e_2| \} \{ 3i|e_1\rangle - 7i|e_2\rangle \}$

$$= -3i\overbrace{\langle e_1|e_1\rangle}^{1} + 7i\underbrace{\langle e_1|e_2\rangle}_{0} - 2i \times 3i\underbrace{\langle e_2|e_1\rangle}_{0} + 2i \times 7i\overbrace{\langle e_2|e_2\rangle}^{1} = -3i - 14$$

$\langle \psi | \chi \rangle = \{ -3i\langle e_1| + 7i\langle e_2| \} \{ -|e_1\rangle + 2i|e_2\rangle \}$ $\qquad \langle \psi | \chi \rangle = \langle \chi | \psi \rangle^*$

$$= -3i \times (-1)\overbrace{\langle e_1|e_1\rangle}^{1} + 7i \times 2i\overbrace{\langle e_2|e_2\rangle}^{1} = 3i - 14$$